Complexity-entropy causality plane: A useful approach to quantify the

stock market inefficiency 🡪 spiega bene introduzione

Shannon entropyhttps://www.youtube.com/watch?v=0GCGaw0QOhA

Permutation entropyhttps://www.youtube.com/watch?v=5vOYgJ-80Bg

KL divergence  <https://www.countbayesie.com/blog/2017/5/9/kullback-leibler-divergence-explained>

Jensen-shannon🡪<https://medium.com/datalab-log/measuring-the-statistical-similarity-between-two-samples-using-jensen-shannon-and-kullback-leibler-8d05af514b15>

<https://iq.opengenus.org/jensen-shannon-divergence/>

Permutation of D <https://www.youtube.com/watch?v=4lIQCoG4MnY>

# Test di efficienza nel mercato immobiliare italiano

In base alle definizioni fornite nel capitolo precedente, come capire se il mercato immobiliare sia o meno efficiente? Da decenni la letteratura accademica cerca di costruire un modello econometrico capace di spiegare i movimenti di prezzo nel mercato immobiliare.

Meese e Wallace[[1]](#footnote-1) applicarono la teoria del mercato efficiente al mercato immobiliare di San Francisco e conclusero che il mercato fosse efficiente sul lungo termine ma non nel breve a causa degli alti costi di transazione.

Case e Shiller[[2]](#footnote-2) proposero un nuovo metodo per esaminare l’applicabilità della “Efficient Market Hypothesis” nel mercato immobiliare di diverse città americane usando il tasso di rendimenti in eccesso.

Abraham e Hendershott[[3]](#footnote-3) usarono invece misure economiche, come il reddito reale e i costi di costruzione, per calcolare il grado di deviazione tra il valore di fondo e il prezzo di transazione immobiliare.

In questo capitolo, invece, si userà un nuovo metodo di misura dell’efficienza del mercato, chiamato “complexity-entropy binary causal plane method”, applicato per la prima volta al mercato immobiliare da Chen, Cai e Zheng[[4]](#footnote-4).

Come per l’efficienza del mercato finanziario, l’efficienza del mercato immobiliare può essere riassunta come segue: il prezzo degli immobili può rispondere in modo tempestivo a ogni tipo di informazione rilevante di modo che il prezzo sia allineato al loro valore intrinseco.

Dunque, la ricerca dell’efficienza del mercato immobiliare deve prima chiarificare il meccanismo di formazione del prezzo.

Di seguito si illustra come il prezzo degli immobili si forma seguendo il principio di non arbitraggio.

Si suppone che i partecipanti al mercato Real Estate (prendendo il punto di vista dell’acquirente) al tempo *t* abbiano due scelte:

1. Acquistare un immobile per viverci con prezzo
2. Prendere l’immobile in affitto al costo di locazione mensile

Si presume valida la possibilità di vendere allo scoperto al fine della dimostrazione.

Per fare in modo che non vi sia arbitraggio, i due casi devono equivalersi:

dove rappresenta il tasso privo di rischio. Se la parte a destra dell’equazione non dovesse eguagliare la sinistra si presenterebbe un’opportunità di arbitraggio. Ad esempio, se allora sarebbe possibile fare un arbitraggio costruendo il seguente portafoglio: si acquista un immobile prendendo in prestito da una banca, dopodiché affittandolo a al mese si ripaga il debito a rate. Se gli attori nel mercato sono razionali allora sfrutteranno questa opportunità d’arbitraggio acquistando una grande quantità di immobili che però causerà un aumento nei prezzi degli stessi fino al raggiungimento dell’equilibrio .

È possibile costruire lo stesso gioco logico assumendo .

Dal momento che i prezzi degli immobili, realisticamente parlando, non saranno mai veramente in equilibrio ma vi saranno sempre opportunità d’arbitraggio, un’equazione più veritiera sarà:

dove è il valore intrinseco dell’immobile e il valore aggiuntivo che contribuisce all’arbitraggio.

Inoltre, analizzando il mercato RE in Cina, Pan e Wang[[5]](#footnote-5) concludono che una componente aggiuntiva di deviazione del prezzo degli immobili dal loro valore intrinseco sia l’irrazionalità presente nel mercato. Questo risultato porta a pensare che dunque il prezzo di un’immobile sia descritto come segue:

dove rappresenta la parte irrazionale del prezzo dell’immobile, facendo così deviare dal valore fondamentale.

Nella maggior parte dei casi , mentre invece farà difficoltà a manifestarsi.

Cercando quindi di comparare il meccanismo di queste due formazioni dei prezzi, rappresenta la componente irrazionale mentre quella razionale.

Si suppone quindi che il prezzo per un immobile sia:

Tuttavia, l’efficienza di mercato si raggiunge quando il mercato è pienamente razionale, il che vuol dire con che segue il random walk e quindi il prezzo dell’immobile è descritto da semplicemente .

Dunque, può essere espressa come:

A questo punto è facile intuire che è possibile cogliere l’efficienza del mercato semplicemente testando se ha un andamento di tipo random walk.

La semplicità intuitiva non segue però quella pratica dal momento che il calcolo sia di che a maggior ragione di non è immediato. Soprattutto quest’ultimo crea le maggiori difficoltà.

Per questo motivo bisogna percorrere una strada differente per approcciare il problema.

Per far questo, si decide di usare il noto rapporto fra prezzo medio degli immobili e il reddito medio pro capite, anche chiamato affordability index, e viene calcolato come segue:

dove  rappresenta il prezzo medio degli immobili e il reddito medio pro capite.

La teoria afferma[[6]](#footnote-6) che questo rapporto, per segnalare buoni condizioni di salute del mercato, deve essere mantenuto in un intervallo ragionevole, generalmente intorno a 8.

Se il rapporto dovesse discostarsi troppo da un intorno di 8 potrebbe significare un malessere del mercato e presenza di comportamenti irrazionali nella formazione dei prezzi.

Case and Shiller affermano inoltre che vi debba essere una relazione stabile tra prezzi e reddito affinchè non vi sia una bolla nel mercato. Alla luce di questa considerazione, basterà verificare se il prezzo degli immobili eccedente la parte non spiegata dal reddito sia efficiente o meno, vale a dire se soddisfa le caratteristiche per il random walking. Inoltre, come detto, il rapporto deve essere stabile, ovvero .

Per avere un’equazione generale, si aggiunge un’intercetta e si trova la seguente equazione:

Così, è un valore randomico che soddisfa . Si può quindi testare l’efficienza del mercato misurando con il permutation entropy method.

## Il Complex-Entropy Binary Causal Plane Method

La comprensione e l'analisi delle serie temporali economiche, in particolare l'evoluzione delle sequenze dei prezzi, attira da molti anni l'attenzione di matematici e fisici. Il matematico francese Louis Bachelier[[7]](#footnote-7), quasi un secolo fa, modellò i prezzi di mercato con quello che oggi è noto come il random walk.

Questa pietra miliare della modellistica finanziaria si basa sull'ipotesi che gli incrementi dei prezzi siano indipendenti e obbediscano a una distribuzione gaussiana. Più tardi, nel 1970, Eugene Fama[[8]](#footnote-8) introdusse la celebre Ipotesi del Mercato Efficiente (EMH).

Secondo la “weak-form” di questa ipotesi, in ogni momento il prezzo di un asset riflette pienamente tutte le informazioni storiche disponibili, ma è ampiamente noto che si tratta solo di una prima approssimazione. Le deviazioni da questo modello, che violano le ipotesi di indipendenza o di gaussianità, sono state riscontrate in molti studi empirici a partire dall’articolo di Benoit Mandelbrot[[9]](#footnote-9). L'esistenza di autocorrelazione tra osservazioni distanti rompe l'efficienza del mercato perché i prezzi passati possono aiutare a prevedere i prezzi futuri; in altre parole, i mercati correlati consentono opportunità di arbitraggio.

Negli anni si sono susseguiti diversi metodi per testare l’efficienza del mercato ma solo recentemente è stato introdotto il Complex-Entropy Binary Causal Plane Method. Zunino et al.[[10]](#footnote-10),[[11]](#footnote-11) hanno dimostrato come questo metodo sia in grado di rilevare efficacemente le informazioni strutturali nascoste nel rumore del sistema, anche se il sistema è al limite del caos. Nel processo di questo test empirico, si usa il complexity-entropy binary causal plane method basato sulla misurazione di per individuare la struttura nascosta dei prezzi del mercato immobiliare e misurarne l'efficienza e la complessità.

Questo metodo, come proposto nel lavoro di Rosso et al.[[12]](#footnote-12), può non solo distinguere i processi gaussiani e non gaussiani, ma anche dimostrare il loro grado di correlazione. Pertanto, è considerato un buon metodo per testare l'efficienza del mercato.

### L’entropia di Shannon

L'entropia può testare con precisione l'incertezza e la confusione delle serie temporali senza ulteriori restrizioni sulla distribuzione. Se il prezzo segue un random walk puro, allora non esisteranno relazioni di correlazione tra le serie temporali, quindi l'entropia della sequenza sarà massima e rappresenterà uno stato completamente disordinato. Se la serie temporale non dovesse seguire il random walk, non si raggiungerà l’entropia massima.

Fu Gulko ad applicare per la prima volta l'entropia allo studio delle serie temporali finanziarie, dimostrando che il formalismo della massima entropia, chiamato anche efficienza informativa, rendeva operativa e testabile l'ipotesi del mercato efficiente[[13]](#footnote-13).

Se il mercato è efficiente, le serie temporali soddisfano il random walk e l'entropia normalizzata è pari a 1. Più piccola è l'entropia, più difficile è il raggiungimento del random walk e meno efficiente è il mercato. Pertanto, l'entropia normalizzata (entropia massima relativa) può essere applicata per misurare l'efficienza del mercato immobiliare.

Nonostante il concetto di entropia sia molto vasto e ampiamente utilizzato in fisica, matematica e, più in generale, in tutte le scienze, il teorema dell’entropia più utile al fine di testare l’efficienza del mercato è quello di Shannon.

L'entropia di Shannon, dovuta a Claude Shannon, è una funzione matematica che intuitivamente corrisponde alla quantità di informazioni contenute o fornite da una fonte di informazione. Questa fonte può essere un testo scritto in una data lingua, un segnale elettrico, un file di computer (raccolta di byte) o anche i prezzi del mercato immobiliare.

#### Intuizione

Si suppone di avere un sistema di scambio di informazioni in cui gli unici attori presenti sono un ricevente ed un emittente.

L'entropia indica la quantità di informazioni necessarie affinché il ricevitore determini in modo inequivocabile ciò che la sorgente ha trasmesso.

Ad esempio, supponiamo che l’emittente invii sempre la stessa informazione, la lettera “a”. Il ricevente sarà sempre certo che, ad ogni messaggio, l’informazione sarà sempre la stessa, ovvero la lettera “a”, per questo l’entropia sarà zero.

D'altra parte, se la fonte invia una "a" metà delle volte e una "b" l'altra metà, il destinatario è incerto sulla lettera successiva da ricevere. L'entropia della sorgente in questo caso è quindi diversa da zero (positiva) e rappresenta quantitativamente l'incertezza che regna sull'informazione proveniente dalla sorgente.

Si crea un esempio in cui vi è un torneo con otto squadre di calcio (Squadra A, Squadra B, Squadra C, …, Squadra H) e l’emittente deve inviare il risultato del torneo, ovvero la squadra vincitrice, al ricevente. Come detto, la probabilità di vincita per ogni squadra è la stessa, quindi P(A)=P(B)=P(C)=…=P(H)=0,125. Inoltre, l’informazione che l’emittente deve inviare può essere solo espressa in bit. Un bit può esprimere solo il risultato di due squadre, due bit il risultato di quattro squadre, mentre invece tre bit possono esprimere il risultato di tutte e otto le squadre. È evidente, dunque, che l’informazione minima per trasmettere il risultato del torneo è tre bit, ovvero 23=8. Quindi, l’entropia è 3.

L’intuizione porta quindi a dire che se abbiamo M esiti ugualmente probabili, l’entropia sarà , nell’esempio .

Ogni esito M ha quindi la probabilità di manifestarsi. Riscrivendo quindi l’equazione trovata sopra con le probabilità è possibile avere:

L’entropia per una serie di probabilità uguali fra loro corrisponde all’entropia massima raggiungibile.

Nel caso in cui gli esiti non avessero la stessa probabilità l’entropia di Shannon può semplicemente diventare:

### Permutazione entropica

Per calcolare l’entropia di una data serie storica, bisogna prima ottenere la sua distribuzione di probabilità.

Rosso et al. hanno dimostrato che il modo migliore per misurare l’entropia di una serie temporale è prendere in considerazione le relazioni casuali all’interno della serie stessa.

Quello che si vuole vedere, in sostanza, è se vi siano dei pattern all’interno della serie che si ripetono nel tempo e, se si ripetono, calcolarne la probabilità da usare come input per l’entropia di Shannon.

La serie temporale può essere di ogni tipo: regolare, caotica, rumorosa o anche presa da un contesto reale.

Per capire meglio come sia possibile creare una distribuzione di probabilità da una serie temporale, si prende ad esempio una serie temporale monodimensionale come quella usata da Bandt e Pompe[[14]](#footnote-14):

Il primo step è quello di suddividere la serie monodimensionale in una matrice di vettori. La suddivisione non è casuale ma dipende dalla scelta di due parametri:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | τ | D |
| Descrizione | Anche chiamato l’”embedding time delay”, decide il numero di periodi di tempo tra gli elementi di ciascuno dei nuovi vettori colonna | L’”embedding dimension” che decide la lunghezza di ogni vettore colonna |
| Condizione di validità | Ogni numero intero positivo | Ogni numero intero > 1 |
| Valore raccomandato | 1 |  |

\*Per scopi pratici, Bandt e Pompe suggeriscono di usare 7 e . Tuttavia, a seconda della applicazione e dei propositi perseguiti, è possibile usare anche altri valori.

Usando ad esempio D=3 e la nostra serie temporale viene suddivisa nella seguente matrice:

τ=1

L’embedding demension non è altro che la finestrella che scorre all’interno della serie temporale di un intervallo pari a (vi è in sostanza un solo periodo temporale tra ogni elemento del vettore).

Il numero di colonne che si andranno a creare per una serie temporale di elementi sarà . Nell’esempio: colonne.

A questo punto la matrice viene mappata in permutazioni di numeri ordinali:

Le permutazioni vengono costruite tenendo conto della posizione ordinale dei valori all’interno dei vettori di partenza. Ad esempio, si consideri la prima colonna della matrice di partenza:

La permutazione di questo vettore è  perché .

La permutazione è quindi data dall’ordine dei valori all’interno dei vettori.

A livello teorico, dal momento che , vi possono essere differenti permutazioni, ovvero:

Calcolando quante volte ogni teorica permutazione si manifesta all’interno della matrice mappata, si trova la distribuzione di probabilità:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Permutazione | Numero di manifestazioni |  |
|  | 2 | 2/5 |
|  | 0 | 0/5 |
|  | 1 | 1/5 |
|  | 2 | 2/5 |
|  | 0 | 0/5 |
|  | 0 | 0/5 |

In fine, si trova la permutazione entropica PE di ordine D della serie temporale, data da:

Calcolandola quindi con l’esempio di prima:

La PE può anche essere normalizzata, fornendo un valore compreso fra 0 e 1:

Più vicino si avvicina a zero, più regolare e deterministica è la serie temporale. Al contrario, all’avvicinarsi ad 1 diventa più rumorosa e randomica.

Inserire codice python

### La Statistical Complexity Measure (SCM)

Oltre alla permutazione entropica, Lamberti et al.[[15]](#footnote-15) mostrano che anche la Statistical Complexity Measure (SCM) può essere usata per misurare l’efficienza del mercato. L'SCM è in grado non solo di rilevare i dettagli dinamici del sistema, ma anche di distinguere la periodicità e il grado di caoticità.

Matematicamente la SCM viene definita come il prodotto fra l’entropia di Shannon e la divergenza Jensen-Shannon.

#### Cos’è la complessità?

In linea di massima si dice che un oggetto, una procedura o un sistema sono “complessi” quando non corrispondono a modelli considerati semplici.

Chiunque, intuitivamente, è capace di capire quando qualcosa è semplice o complesso.

In fisica, la nozione di “complesso” può essere colta tramite un’esemplificazione, considerando da una parte un perfetto cristallo e dall’altra un gas isolato ideale.

Per poter procedere con l’esempio è necessario fornire delle basiche nozioni di termodinamica. L’esempio, in particolare, ruota attorno al concetto di “microstate” e “accessible microstate” delle molecole all’interno della materia.

I dizionari definiscono "macro" come “grande” e "micro" come “molto piccolo”, ma un macrostato e un microstato in termodinamica non si riferiscono alle dimensioni grandi o piccole di un sistema fisico. Lo stato di un sistema termodinamico, o macrostato, dipende dalla particolare configurazione microscopica dei suoi costituenti elementari, o microstato. Posto che a un macrostato corrispondono diversi possibili macrostati, i sistemi evolvono verso il macrostato più probabile e tale probabilità è legata all’entropia, secondo la legge descritta dall’equazione di Boltzmann.

Ogni macrostato viene descritto per mezzo delle coordinate termodinamiche, ossia pressione, volume e temperatura. Da un punto di vista microscopico però ogni stato è individuato dall’insieme di un gran numero di molecole, che si muovono ognuna con la propria energia cinetica.

In sostanza, il microstato è lo stato microscopico di un sistema descritto dalla posizione e dalla velocità delle molecole che lo costituiscono.

Le molecole cambiano microstati ogni istante, ovvero cambiano la posizione e l’energia cinetica continuamente. Ad esempio, in una mole (6,022\*1023 molecole) le molecole si muovono in media, quando si considera un gas, a mille chilometri all’ora. Dal momento che, in un miliardesimo di secondo, ogni molecola si scontra con le altre almeno sette volte, il cambiamento di microstati fra un istante e l’altro è straordinariamente grande.

Questo significa che vi sono infinitamente numerosi microstati accessibili da un istante all’altro.

Per microstati accessibili si indicano tutte le possibili combinazioni con cui l’energia può essere disposta tra le varie molecole. Maggiore il numero di microstati accessibili in un sistema, maggiore la sua entropia.

Per evidenziare maggiormente la relazione fra entropia e microstati accessibili è sufficiente riportare l’equazione di Ludwig Boltzmann: S = dove S indica l’entropia, è la costante di Boltzmann e W è il numero di microstati accessibili.

Quindi, tornando all’esempio iniziale, un cristallo perfetto (ovvero un cristallo privo di qualunque tipo di difetto o imperfezione) è strutturalmente ordinato e i suoi atomi sono disposti seguendo una rigida simmetria.

A livello teorico, il quantitativo di informazione necessario per descrivere la struttura degli atomi di un cristallo è inferiore rispetto a quello richiesto per descrivere la struttura di un gas, in ogni suo istante. Pertanto, relativamente al gas, l’informazione necessaria per un cristallo può essere considerata “minima”. Inoltre, i microstati accessibili in un cristallo sono molto inferiori considerando la sua natura di perfetta simmetria e di ordine. La distribuzione di probabilità, quindi, dei suoi microstati accessibili è concentrata su un numero relativamente piccolo.

In un gas, i microstati accessibili sono quasi infiniti, per questo un gas ideale può trovarsi in un qualunque microstato accessibile con la stessa probabilità.

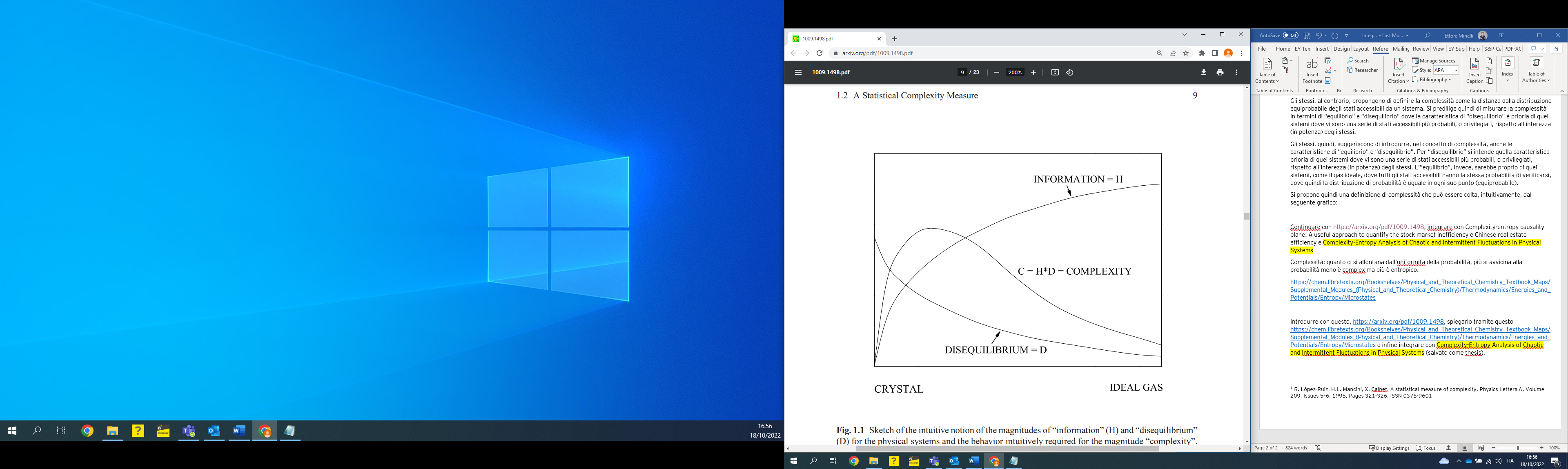
Lopez-Ruiz et al.[[16]](#footnote-16) considerano il cristallo perfetto e il gas ideale esempi di sistema con zero complessità, nonostante siano diametralmente opposti nelle loro caratteristiche di “informazione” e “ordine”.

Ne consegue che il concetto di complessità non può ruotare solamente attorno a queste due caratteristiche.

Gli stessi, al contrario, propongono di definire la complessità come la distanza dalla distribuzione equiprobabile degli stati accessibili da un sistema. Si predilige quindi di misurare la complessità in termini di “equilibrio” e “disequilibrio” dove la caratteristica di “disequilibrio” è prioria di quei sistemi dove vi sono una serie di stati accessibili più probabili, o privilegiati, rispetto all’interezza (in potenza) degli stessi.

Gli stessi, quindi, suggeriscono di introdurre, nel concetto di complessità, anche le caratteristiche di “equilibrio” e “disequilibrio”. Per “disequilibrio” si intende quella caratteristica prioria di quei sistemi dove vi sono una serie di stati accessibili più probabili, o privilegiati, rispetto all’interezza (in potenza) degli stessi. L’”equilibrio”, invece, sarebbe proprio di quei sistemi, come il gas ideale, dove tutti gli stati accessibili hanno la stessa probabilità di verificarsi, dove quindi la distribuzione di probabilità è uguale in ogni suo punto (equiprobabile).

Si propone quindi una definizione di complessità che può essere colta, intuitivamente, dal seguente grafico:



#### Formula matematica della complessità

Il prodotto della “informazione” H e del “disequilibrio” D rappresenta la misura di complessità di un sistema.

Si può ora formalizzare, in termini più quantitativi e statistici, il concetto di complessità.

Si assuma che un sistema abbia stati accessibili . Questo sistema verrà chiamato un e, ad ogni stato accessibile, sarà possibile associare la corrispondente probabilità  con la condizione e per ogni .

Di questo sistema è possibile calcolare la quantità informativa, ovvero l’entropia di Shannon .

Nel caso di un cristallo perfetto, lo stato è quello più probabile , mentre tuti gli altri sono molto improbabili, . Quindi . Al contrario, nei gas ideali ogni stato accessibile ha la stessa probabilità, quindi e perciò ovvero l’entropia massima per un .

Ogni altro sistema avrà un’entropia compresa fra questi due estremi.

Per quanto riguarda invece la variabile D, si è detto che, intuitivamente, corrisponde alla distanza della distribuzione di probabilità di un sistema dalla sua distribuzione equiprobabile. D deve quindi avere nel caso di distribuzione equiprobabile, e nel caso di distribuzione non equiprobabile.

Si può quindi scrivere l’equazione di disequilibrio come:

Secondo quindi questa equazione, un cristallo perfetto avrebbe disequilibrio massimo, con e per , mentre un gas ideale avrebbe un disequilibrio per costruzione. Ogni altro sistema avrà un valore di D compreso fra questi due estremi.

La complessità sarà dunque:

Le caratteristiche di un mercato efficiente sono quindi quelle di avere un’alta entropia H, dal momento che rappresenta la randomicità di una serie di dati, e una complessità prossima allo zero. In sostanza, più la distribuzione di probabilità della serie temporale del mercato si avvicina alla equiprobabilità più si può considerare efficiente.

All’interno del test di efficienza del mercato, come misura di divergenza (o misura di disequilibrio che dir si voglia), si userà la divergenza di Jensen-Shannon poiché, come spiegato da Lamberti et al.[[17]](#footnote-17) e Martin et al.[[18]](#footnote-18), è una grandezza intensiva[[19]](#footnote-19) che meglio riesce a spiegare i fenomeni reali.

La misura di disequilibrio di Jensen-Shannon è rappresentata dalla seguente equazione:

dove rappresenta la somma delle distribuzioni di probabilità ottenute dal sistema e dalla distribuzione equiprobabile. rappresenta l’entropia di Shannon.

Riscrivere la parte sull’entropia grazie a: Complexity-Entropy Analysis of Chaotic and Intermittent

Fluctuations in Physical Systems

1. R. Meese and N. Wallace, “Testing the present value relation for housing prices: should I leave my house in san Francisco?,” Journal of Urban Economics, vol. 35, no. 3, pp. 245–266, 1994 [↑](#footnote-ref-1)
2. K. E. Case and R. J. Shiller, “Forecasting prices and excess returns in the housing market,” Real Estate Economics, vol. 18, no. 3, pp. 253–273, 1990. [↑](#footnote-ref-2)
3. J. M. Abraham and P. H. Hendershott, “Bubbles in metropolitan real estate markets,” NBRE Working Papers, vol. 7, no. 35, pp. 171–192, 1994. [↑](#footnote-ref-3)
4. Yan Chen, Ya Cai, Chengli Zheng, "Efficiency of Chinese Real Estate Market Based on Complexity-Entropy Binary Causal Plane Method", Complexity, vol. 2020, Article ID 2791352, 15 pages, 2020. [↑](#footnote-ref-4)
5. A. Pan and H. Wang, “Inefficiencies of the real estate market in China: theory and empirical analysis,” Finance and Economics, vol. 7, pp. 55–63, 2008 [↑](#footnote-ref-5)
6. K. E. Case and R. J. Shiller, “Is there a bubble in the housing market?,” Brookings Papers on Economic Activity, vol. 2003, no. 2, pp. 299–362, 2003. [↑](#footnote-ref-6)
7. L. Bachelier, Théorie de la spéculation, Ph.D. Thesis, Sorbonne, Paris, 1900 [↑](#footnote-ref-7)
8. E.F. Fama, Efficient capital markets: A review of theory and empirical work, J. Finance 25 (1970) 383–417. [↑](#footnote-ref-8)
9. B. Mandelbrot, The variation of certain speculative prices, J. Bus. 36 (1963) 394–419. [↑](#footnote-ref-9)
10. L. Zunino, M. Zanin, O. A. P´erez, D. G. P´erez, and O. A. Rosso, “Forbidden patterns, permutation entropy and stock market inefficiency,” Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, vol. 388, no. 14, pp. 2854–2864, 2009. [↑](#footnote-ref-10)
11. L. Zunino, M. Zanin, B. M. Tabak, D. G. P´erez, and O. A. Rosso, “Complexity-entropy causality plane: a useful approach to quantify the stock market inefficiency,” Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, vol. 389, no. 9, pp. 1891–1901, 2010. [↑](#footnote-ref-11)
12. O. A. Rosso, H. A. Larrondo, M. T. Martin et al., “Distinguishing noise from chaos,” Physical Review Letters, vol. 99, no. 15, Article ID 154102, 2007. [↑](#footnote-ref-12)
13. L. Gulko, “The entropic market hypothesis,” International Journal of Theoretical and Applied Finance, vol. 2, no. 3, pp. 293–329, 1999. [↑](#footnote-ref-13)
14. Bandt, Christoph & Pompe, Bernd. (2002). Permutation Entropy: A Natural Complexity Measure for Time Series. [↑](#footnote-ref-14)
15. P. W. Lamberti, M. T. Martin, A. Plastino, and O. A., “Intensive entropic non-triviality measure,” Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, vol. 334, no. 1-2, pp. 119–131, 2004. [↑](#footnote-ref-15)
16. R. López-Ruiz, H.L. Mancini, X. Calbet, A statistical measure of complexity, Physics Letters A, Volume 209, Issues 5–6, 1995, Pages 321-326, ISSN 0375-9601 [↑](#footnote-ref-16)
17. P.W Lamberti, M.T Martin, A Plastino, and O.A Rosso. Intensive entropic non-triviality measure. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 334(1):119–131, 2004. [↑](#footnote-ref-17)
18. M.T. Martin, A. Plastino, and O.A. Rosso. Generalized statistical complexity measures: Geometrical and analytical properties. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 369(2):439 – 462, 2006 [↑](#footnote-ref-18)
19. Si intendono per “grandezze intensive” le grandezze che non dipendono dalle dimensioni del campione [↑](#footnote-ref-19)